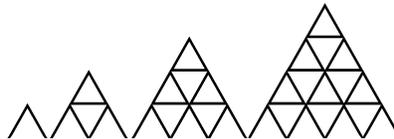


## Wir suchen eine Formel für das Kartenhaus

Ein Kartenhaus kannst du aus Spielkarten, Bierdeckeln oder anderen rechteckigen Flächen bauen. Dazu lehnt du jeweils zwei Karten aneinander, sodass sich die Wände gegenseitig stützen. Sobald du zwei dieser Zimmer nebeneinander gebaut hast, legst du eine Karte oben drauf, um einen Boden für das nächste Stockwerk zu bauen:

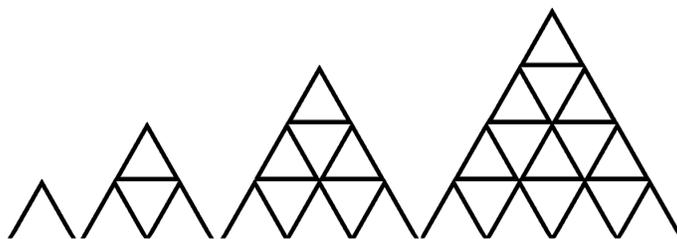


Versuche folgende Fragen zu beantworten:

1. Wie viele Stockwerke (Ebenen) hat ein Kartenhaus, das aus 100 Karten besteht?
2. Wie viele Karten brauchst du für ein zehnstöckiges Kartenhaus?
3. Wie viele zusätzliche Karten brauchst du, um aus einem zehnstöckigen Kartenhaus ein elfstöckiges zu machen?
4. Findest du eine Formel für eine Funktion, mit der du die Anzahl der Karten  $k(x)$  für ein Haus mit beliebig vielen Stockwerken  $x$  ermitteln kannst?
5. Wie viele Stockwerke kann ein Kartenhaus höchstens haben, wenn du es aus einem klassischen Spielkartendeck mit 52 Karten baust?
6. Wie viele Kartendecks brauchst du für ein fünfzehnstöckiges Kartenhaus und wie viele Karten bleiben dabei übrig?
7. Findest du eine Mindesthöhe bzw. eine Mindestanzahl an Stockwerken, sodass keine Karten übrig bleiben, wenn du nur ganze Spielkartendecks verbauen sollst?

Ebenen	Wände	Böden	Karten	Ausbau
1				
2				
3				
4				

## Tabelle und Formeln der regulären Variante



Ebenen	Böden	Wände	Karten	Ausbau
0	0	0	0	0
1	0	2	2	2
2	1	6	7	5
3	3	12	15	8
4	6	20	26	11
5	10	30	40	14
6	15	42	57	17
7	21	56	77	20
8	28	72	100	23
9	36	90	126	26
10	45	110	155	29
11	55	132	187	32
12	66	156	222	35
13	78	182	260	38
14	91	210	301	41
15	105	240	345	44

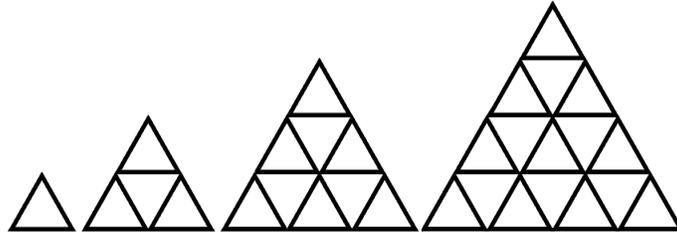
rekursive Formel:

$$k(x) = k(x - 1) + 3x - 1 \text{ bzw. } k(x + 1) = k(x) + 3x + 2 \text{ mit } k(0) = 0$$

explizite Formel:

$$k(x) = 3(1 + 2 + 3 + \dots + x) - x = \frac{3x(x+1)}{2} - x = \frac{3x^2 + 3x}{2} - \frac{2x}{2} = \frac{3x^2 + x}{2} = \frac{x}{2}(3x + 1)$$

## Tabelle und Formeln der einfacheren Variante



Ebenen	Böden	Wände	Karten	Ausbau
0	0	0	0	0
1	1	2	3	3
2	3	6	9	6
3	6	12	18	9
4	10	20	30	12
5	15	30	45	15
6	21	42	63	18
7	28	56	84	21
8	36	72	108	24
9	45	90	135	27
10	55	110	165	30
11	66	132	198	33
12	78	156	234	36
13	91	182	273	39
14	105	210	315	42
15	120	240	360	45

rekursive Formel:

$$k(x) = k(x - 1) + 3x \text{ bzw. } k(x + 1) = k(x) + 3x + 3 \text{ mit } k(0) = 0$$

explizite Formel:

$$k(x) = 3(1 + 2 + 3 + \dots + x) = \frac{3x(x+1)}{2} = \frac{3x^2+3x}{2}$$

## Musterlösung

1. Wie viele Stockwerke hat ein Kartenhaus, das aus hundert Karten besteht?

Antwort: Das Kartenhaus ist höchstens acht Stockwerke hoch.

Begründung:  $k(x) = 100 \Rightarrow x = 8$

2. Wie viele Karten brauchst du für ein zehnstöckiges Kartenhaus?

Antwort: Wir brauchen 155 Karten.

Begründung:  $k(10) = 155$

3. Wie viele zusätzliche Karten brauchst du, um aus einem zehnstöckigen Kartenhaus ein elfstöckiges zu machen?

Antwort: Wir brauchen 32 zusätzliche Karten.

Begründung:  $k(11) - k(10) = 187 - 155 = 32$

4. Findest du eine Formel für eine Funktion, mit der du die Anzahl der Karten  $k(x)$  für ein Haus mit beliebig vielen Stockwerken  $x$  ermitteln kannst?

→ siehe Lösungsblatt 2

5. Wie viele Stockwerke kann ein Kartenhaus höchstens haben, wenn du es aus einem klassischen Spielkartendeck mit 52 Karten baust?

Antwort: Das Kartenhaus kann höchstens fünf Stockwerke hoch sein.

Begründung:  $k(x) = 52 \Rightarrow x \approx 5,7$

6. Wie viele Kartendecks brauchst du für ein fünfzehnstöckiges Kartenhaus und wie viele Karten bleiben dabei übrig?

Antwort: Wir brauchen sieben Kartendecks und es bleiben 19 Karten übrig.

Begründung:  $k(15) = 345 \Rightarrow 345 : 52 \approx 7 \Rightarrow 7 \cdot 52 = 364 \Rightarrow 364 - 345 = 19$

7. Findest du eine Höhe bzw. eine Anzahl an Stockwerken, sodass keine Karten übrig bleiben, wenn du nur ganze Spielkartendecks verbauen sollst?

Antwort: Kartenhäuser deren Anzahl an Stockwerken Vielfache von 13 sind gehen sich mit ganzen Spielkartendecks aus, sodass deren Anzahl ein Vielfaches von 5 ist.

Begründung:  $k(13) = 260 \Rightarrow 260 : 52 = 5$